



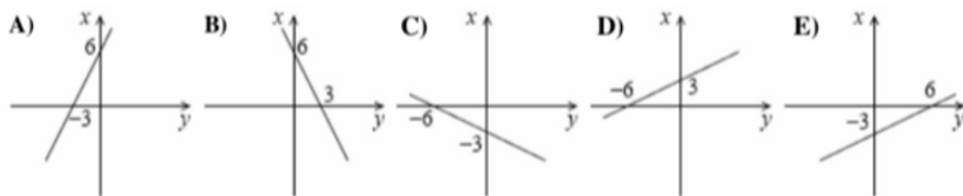
OLIMPIADAS DE MATEMATICA, 2014.
 Universidad de Antioquia
 Taller grados Décimo y Undécimo.
 (Tomados de www.obm.org.br)

AVISO: Los textos aquí publicados son responsabilidad total de sus creadores. Estos son materiales en construcción.

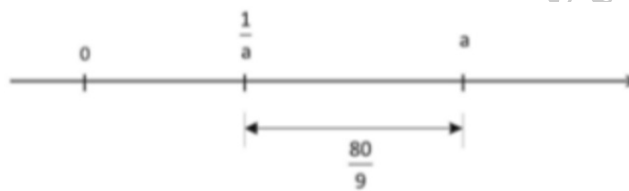
Errores y/o comentarios por favor comunicarlos a: olimpiadasmaticas@udea.edu.co

1. Álgebra básica. Propiedades de los números reales.

1. Topacio iba a dibujar la gráfica de $y = 2x + 6$ pero cambio los ejes de lugar. ¿Como debe quedar el dibujo de esa función con los ejes cambiados de lugar?



2. El número entero positivo a y el número $\frac{1}{a}$ se ubican en la recta de la siguiente manera.



¿Cuál es la suma de estos dos números?

- a) $\frac{9}{81}$ b) $\frac{9}{80}$ c) $\frac{81}{9}$ d) $\frac{82}{9}$ e) 9

3. Considere la función f , definida sobre los números reales tal que $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, para cada $x \neq -\frac{3}{2}$. Determine el número de tales funciones para las cuales $f(f(x)) = x$, para todo x tal que $f(f(x))$ es bien definida.

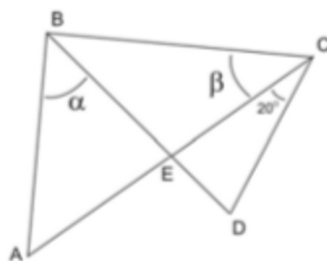
- a) 0 b) 1 c) 4 d) 2 e) Infinitas

4. ¿Cuántos de los números 2, 3, 5, 7, 11 son divisores de $341^4 - 41^4$?

- a) Uno b) Dos c) Tres d) Cuatro e) Cinco

2. Geometría. Relaciones espaciales.

1. En la figura abajo tenemos $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CD} = \overline{CE}$. Además, α y β representan medidas de ángulos. ¿Cuál es el valor de la razón $\frac{\alpha}{\beta}$?

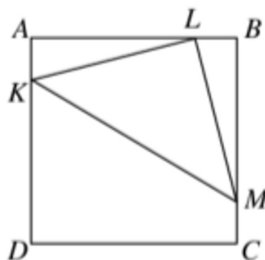


- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{3}$ d) 1 e) $\frac{5}{4}$

2. En un triángulo ABC con $m(\hat{A}BC) - m(\hat{B}AC) = 50^\circ$, la bisectriz del ángulo $\hat{A}CB$ intersecta el lado \overline{AB} en D . Sea E el punto del lado \overline{AC} tal que $m(\hat{C}DE) = 90^\circ$. La medida del ángulo $\hat{A}DE$ es:

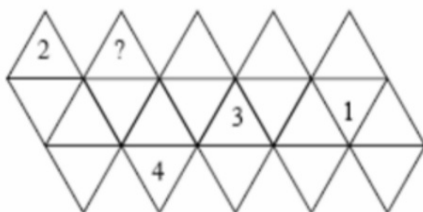
- a) 25° b) 30° c) 40° d) 45° e) 50°

3. En la figura abajo el cuadrado $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, K pertenece al lado \overline{AD} , L pertenece al lado \overline{AB} , M pertenece al lado \overline{BC} y KLM es un triángulo isósceles, siendo en L el ángulo recto. Entonces el área del cuadrilátero $CDKM$ es igual a:



- a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

4. La figura a seguir fue recortada en cartulina para luego doblarla y formar un icosaedro. Las caras en blanco fueron numeradas de tal manera que alrededor de cada vértice (puntas del sólido) resultan los números de 1 a 5. ¿Cuál número esta en la cara con signo de interrogación?



- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

3. Combinatoria. Conteo.

1. En una clase de 36 alumnos, todos tienen alturas diferentes. El más bajito de los niños es más alto que cinco niñas, el segundo niño más bajo es más alto que 6 niñas, el tercer niño más bajo es más alto que 7 niñas y así sucesivamente, teniendo en cuenta que el niño más alto es también más alto que todas las niñas. ¿Cuántas niñas hay en esa clase?

- a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

2. Un subconjunto de $\{1, 2, \dots, 19, 20\}$ es llamado *superpar* si al tomar cualquier par de sus elementos este tiene producto par. La mayor cantidad de elementos de un subconjunto superpar es:

- a) 3 b) 4 c) 6 d) 7 e) 11

3. Aurora tiene 5 libros de egiptología en un estante. En el final de semana, ella limpió el estante y, al reubicar los libros, ubicó dos de ellos en el lugar donde estaban y los demás en lugares diferentes de donde estaban. ¿De cuántas maneras ella podría hacer esto?

- a) 20 b) 25 c) 30 d) 34 e) 45

4. Rafael tiene 10 tarjetas. Cada una tiene escrito uno de los números 3, 8, 13, 23, 28, 33, 48, 53, 68 y todos los 10 números aparecen. ¿Cuál es el mínimo número de tarjetas que Rafael puede escoger de tal modo que la suma de los números de las tarjetas escogidas sea exactamente 100?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) No es posible obtener 100 como suma de esas tarjetas

4. Problemas de análisis crítico.

1. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ y $f(x+12) = f(x+21) = f(x)$, para cada $x \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(2014)$ es igual a

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 2014

2. Para cada entero positivo n , S_n representa la suma de los 10 primeros múltiplos positivos de n . Por ejemplo, $S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$. ¿Cuánto es $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{10}$?

a) 2925 b) 3025 c) 3125 d) 3225 e) 3325

3. Dos carros salen simultáneamente de las ciudades A y B , yendo de una ciudad en dirección a la otra, con velocidades constantes y en sentidos opuestos. Las dos ciudades están unidas por una carretera recta. Cuando el carro más rápido llega al punto medio M de AB , la distancia entre los dos carros es de 96 kms. Cuando el carro más lento llega al punto M los carros están a 160 kms uno del otro. ¿Cuál es la distancia, en kms, entre las dos ciudades?

a) 320 b) 420 c) 480 d) 520 e) 560

4. Cuatro amigos, Ariel, Beriel, Ceriel y Deriel están jugando cartas. Son 20 cartas diferentes, cada carta tiene un entre los siguientes 4 colores: azul, amarillo, verde y rojo. Además de un número del 1 al 5. Cada amigo recibe 5 cartas, de tal manera que todas las cartas son distribuidas. Cada uno de ellos hace las siguientes afirmaciones:

- a) **Ariel:** Yo tengo 4 cartas con el mismo número.
- b) **Beriel:** Yo tengo las 5 rojas.
- c) **Ceriel:** Mis cinco cartas tienen los colores verde y rojo.
- d) **Deriel:** Yo tengo 3 cartas de un número y dos cartas de otro número.

Sabemos que sólo una de las afirmaciones es falsa. ¿Quién hizo esta afirmación?

- a) Ariel b) Beriel c) Ceriel d) Deriel e) No es posible definir.