



Olimpiadas Regionales de Matemática, 2015.
 Universidad de Antioquia
 www.gkmath.com

AVISO: Los textos aquí publicados son responsabilidad total de sus creadores. Estos son materiales en construcción.

Errores y/o comentarios por favor comunicarlos a:
 olimpiadasmaticas@udea.edu.co

Diviértete con las funciones.

1. Si $h(x) = 3x^2 - 2bx - 5$ y $h(-2) = 7$. ¿Cuál es el valor de b ?
2. Sea f una función definida por $f(x) = ax^2 - \sqrt{2}$ para algún número positivo a . Si $f(f(\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$. Encuentre a .
3. Sea f un polinomio tal que, para todos los números reales x , $f(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$. Para todo número real x , encuentre $f(x^2 - 1)$.
4. Si $f(2x) = \frac{2}{2+x}$ para todo $x > 0$, ¿cuál es el valor de $2f(x)$?
5. Sea $f(n)$ el número de veces que aparece el 1 cuando se escriben los números desde el 1 hasta n . Por ejemplo $f(8) = 1$, $f(9) = 1$, $f(10) = 2$, $f(11) = 4$ y $f(12) = 5$. Determine el valor $f(321)$.
6. Si $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ y $f(-3) = 2$, encuentre $f(3)$
7. Una función lineal f satisface que $f(1) = 3$ y $f(f(1)) = 7$, encuentre $f(f(5))$.
8. Para todo número positivo a y b , una función f satisface la ecuación $f(ab) = f(a) + f(b)$. Si $f(5) = x$ y $f(7) = y$. ¿Cuál es el valor de $f(245)$?

9. Sea $f(x)$ es una función definida sobre los números enteros x y supongamos que satisface las siguientes propiedades:

a) $f(0) \neq 0$

b) $f(1) = 3$

c) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$

Determine el valor de $f(7)$.

10. Sea $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ para $-1 < x < 1$, entonces reescribe

$$f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right) \text{ en terminos de } f(x).$$

11. Supongamos que f es una función real valuada tal que

$$f(m+1) = m(-1)^m - 2f(m)$$

y $f(1) = f(10)$. Encuentre

$$f(1) + f(2) + \dots + f(9)$$

12. Si $f(x) = 2^x$, para que valor de n es $f^n(2) = 4^8$ (aquí $f^n(x)$ representa $f(f(f \dots (f(x))))$, donde f se repite n veces).

13. Supongamos que una función f es dada por las siguiente tabla

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	1	5	3

Supongamos que $x_0 = 2$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Encuentre el valor de x_{2015} .

14. Una función es tal que para cada entero n ,

$$f(n+1) = \frac{f(n)}{1+af(n)},$$

donde a es un número real, $f(1) = 1$ y $f(11) = \frac{1}{2011}$. Encuentre a .

15. Sea g una función tal que

$$3g(x) + 2g(1 - x) = 9 + 2x$$

para todo x . Encuentre el valor de $g(2)$.

16. Sea f una función la cual satisface que $f(29 + x) = f(29 - x)$ para todo número real x . Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente tres soluciones diferentes a, b y c . Determine la suma de $a + b + c$.
17. Sea f una función la cual satisface que $f(1 + x) = f(1 - x)$ para todo número real x . Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente cuatro raíces diferentes. Determine el valor de la suma de estos.
18. Sea $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y sea $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$, con $f^1(x) = f(x)$. ¿Cuál es el valor de $f^{2015}(2015)$?
19. Sea f una función de los enteros no negativos a los reales positivos tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ se cumple para todos los enteros no negativos x y y . Si $f(19) = 524288k$, Encuentre $f(4)$ en términos de k .
20. Sea $f(x) = x^2 - 2$ y f^n denota la función f aplicada n veces. Calcule el residuo de $f^{24}(18)$ cuando se divide por 89.
21. Consideremos el arreglo triangular de números con $0, 1, 2, 3, \dots$ a lo largo de los lados y los números del interior se obtienen sumando los números adyacentes en la fila anterior (Como en el triángulo de Pascal). Se muestra las filas de la 1 a la 6.

			0			
		1		1		
	2		2		2	
	3	4		4		3
4		7	8		7	4
5	11	15	15	11	5	

Sea $f(n)$ la suma de los números en la fila n . ¿Cuál es el residuo que deja $f(100)$ cuando se divide por 100?